



Pompes et turbines

Eléments de théorie



Cours de « **Compléments d'Hydraulique** »
3^{ème} Bac Architectes & Constructions





La pompe (ou turbine) *et la puissance hydraulique...*



- Amener de l'eau d'un niveau donné à un niveau supérieur...
- ... « Produire de l'énergie » en mobilisant l'écoulement

=> Egyptiens, romains, ...

~~Turbomachines~~ (résistance à l'avancement mobilisée sans considérations physiques...)

=> Mécanique des Fluides « absente »...



- Euler (1754)

Mécanisme de transfert d'énergie entre fluide et machine (parallélisme lois de Newton, conservation du moment angulaire)

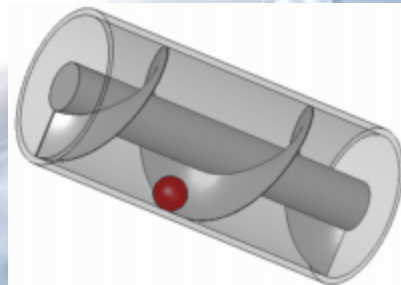
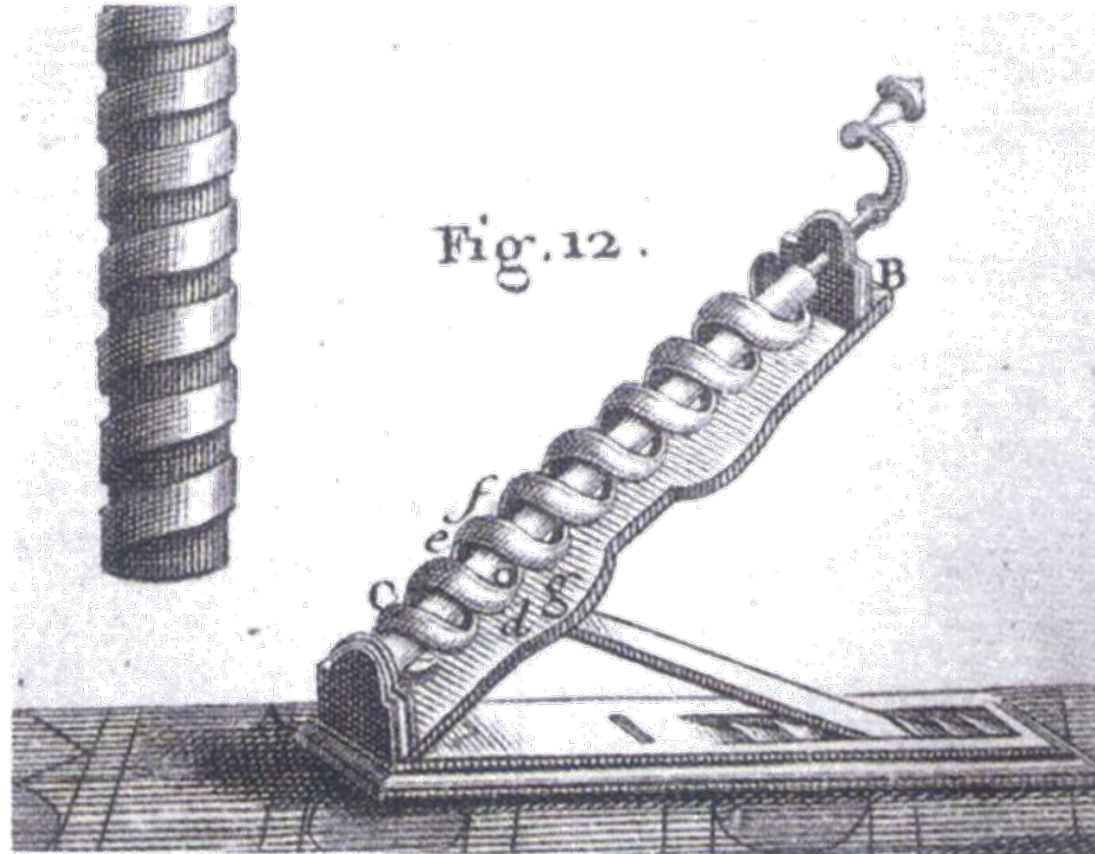
- Smeaton (1752)

Etude de modèles réduits

=> Début d'une approche scientifique dans la conception des turbomachines



- Vis d'Archimède



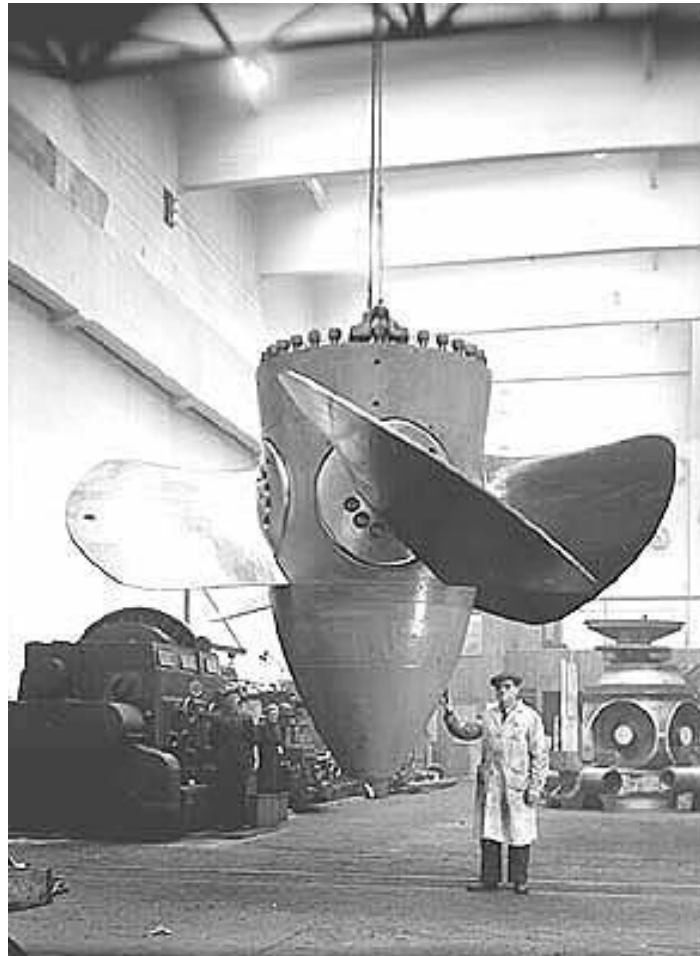
- Pompes à eau potable



- Turbine Pelton



- Turbine Kaplan



- Turbine Francis



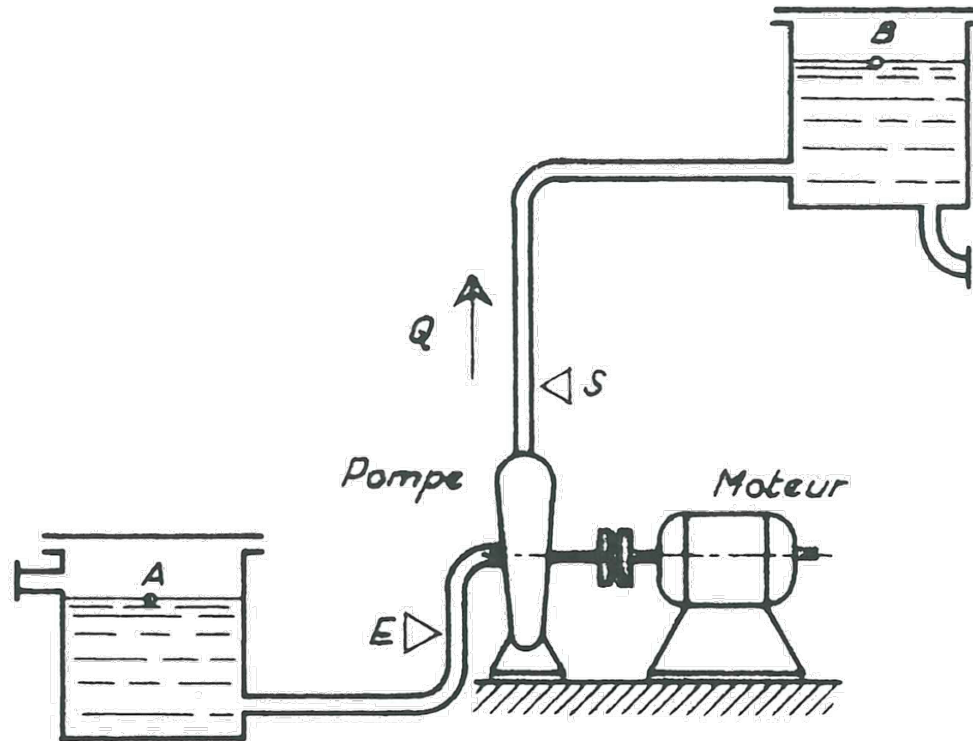


Etude qualitative des pompes

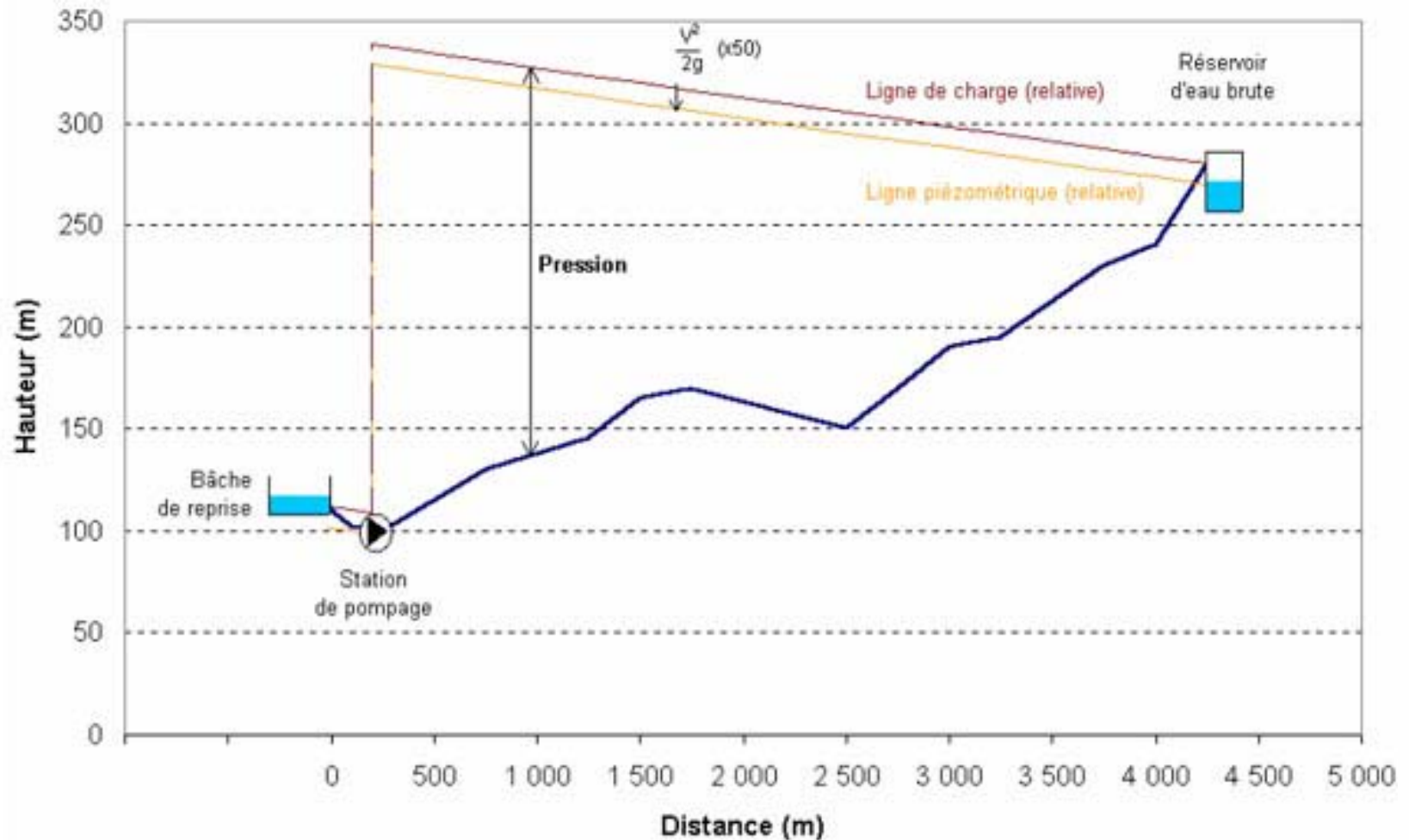
Accroissement d'énergie; origine & bilan



- Pompe, moteur, réservoir et tuyauterie...



Accroissement d'énergie mécanique par unité de poids du fluide entre les sections d'entrée et de sortie de la pompe



Origine de l'accroissement d'énergie...

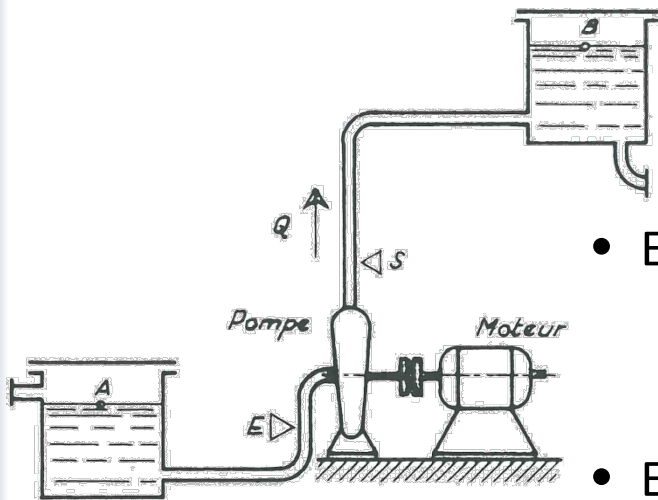
- Entre A et B...

Utilisation de l'équation de Bernoulli (valide...)

- Entre A et E

$$H_A = H_E + \sum \Delta h_{AE}$$

$$\text{avec } H = \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} + z$$



- Entre S et B

$$H_S = H_B + \sum \Delta h_{SB}$$

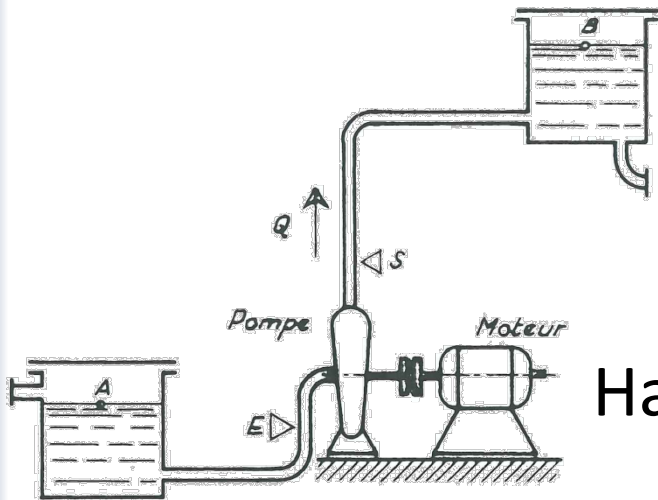
- Entre A et B... => Σ

$$H_A + H_S = H_E + H_B + \sum \Delta h_{AE} + \sum \Delta h_{SB}$$

$$\underbrace{(H_S - H_E)}_{H_t} = \underbrace{(H_B - H_A)}_{H_{Hydr}} + \underbrace{\sum \Delta h_{AE} + \sum \Delta h_{SB}}_{\Delta h_{tuyau}}$$

- Entre A et B...

Utilisation de l'équation de Bernoulli (valide...)



$$U_A \approx 0$$

$$U_B \approx 0$$

$$U_E \approx U_S$$

$$z_E \approx z_S$$

Hauteur **manométrique** $H_t \approx \frac{p_S - p_E}{\rho g}$

Hauteur **hydraulique** $H_{Hydr} = H_t - \sum \Delta h_{réseau}$



Origine de l'accroissement d'énergie...

Etapes...

- (1) Fourniture d'énergie par le moteur
- (2) accroissement dans la roue
- (3) accroissement conséquent entre l'entrée (E) et la sortie (S)
- (4) accroissement conséquent entre A et B

Hypothèses:

- Machine en régime
- Ecoulement permanent

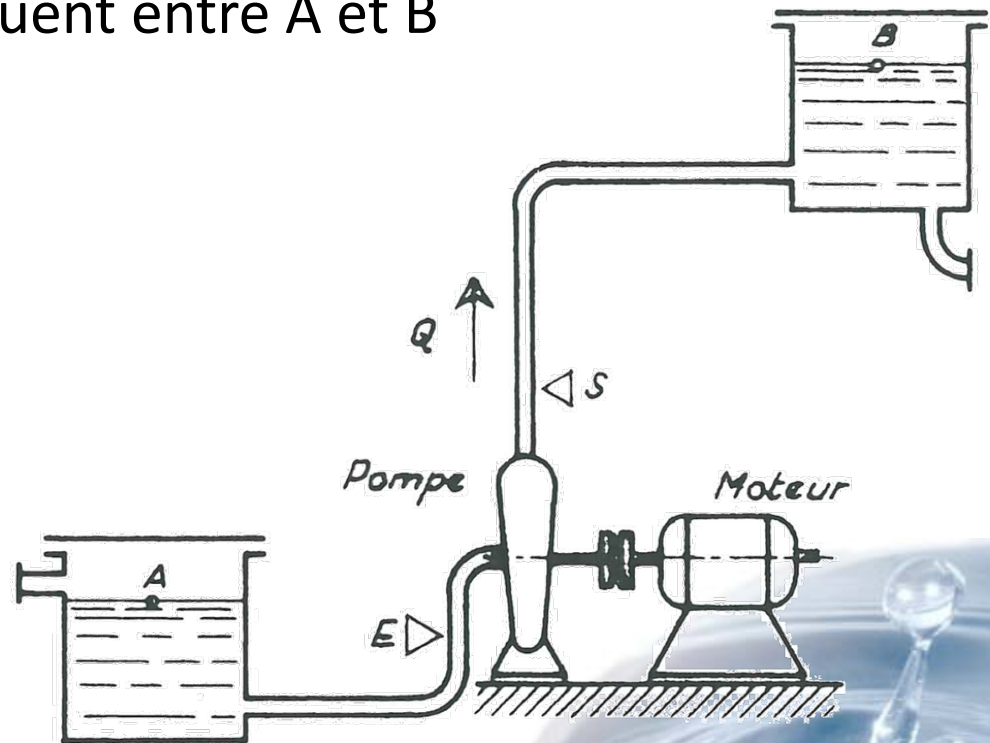
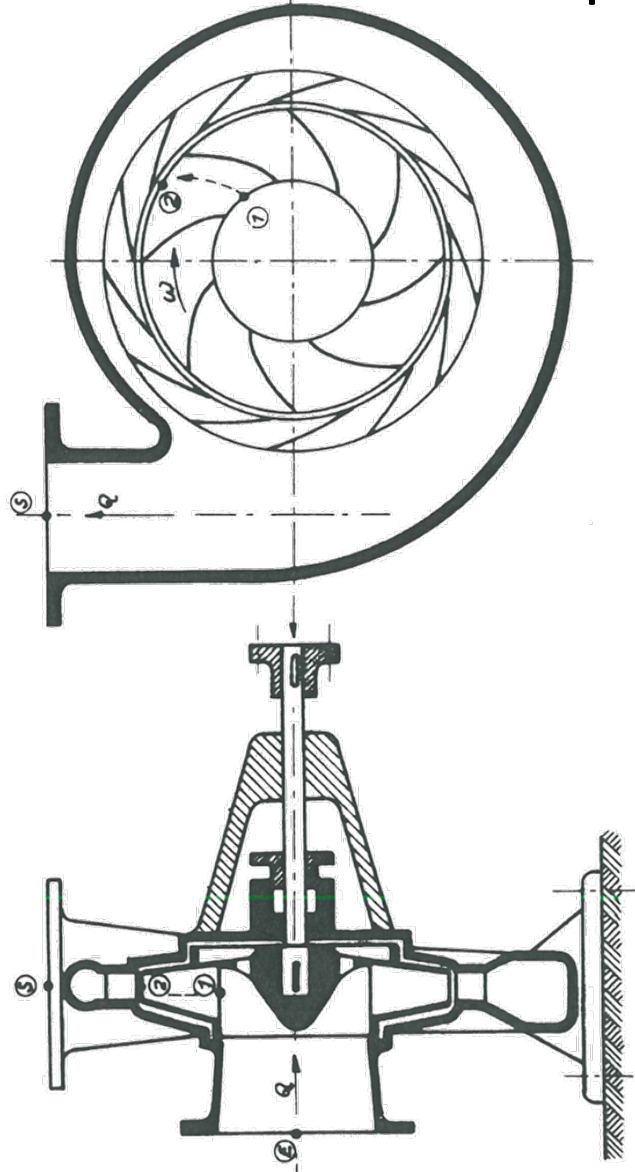


Illustration sur une pompe centrifuge...



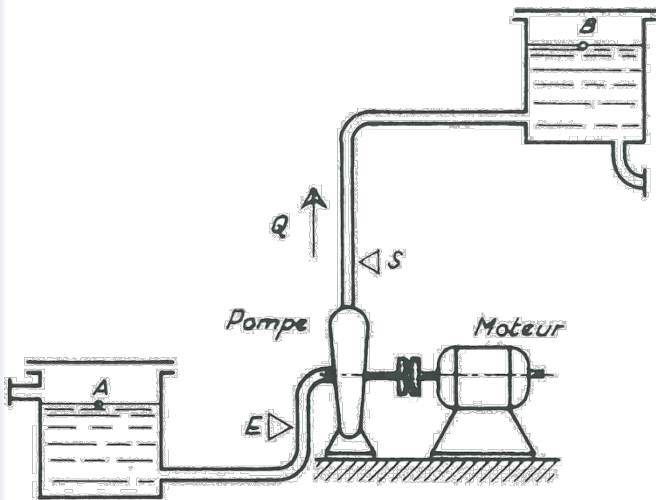
- (1) distributeur (aubes ou pas)
- (2) roue mobile (aubes)
- (3) diffuseur (aubes ou pas)
- (4) canal en volute

Aubes: guidage du fluide
=> imposent les trajectoires



Origine de l'accroissement d'énergie...

- Entre l'entrée (E) et la sortie (S) de la pompe...
(→ Hauteur manométrique)



- Hauteur **indiquée** H_i

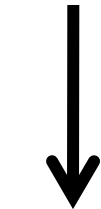
$$H_t = H_i - \sum \Delta h_{ES}$$

Fuites, chocs,
frottements,
recirculation,...

Origine de l'accroissement d'énergie... Synthèse

P_e

P_e , Puissance *effective*
Puissance fournie par le moteur



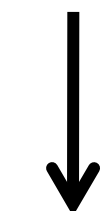
P_i

$P_i (H_i)$, Puissance (Hauteur) *indiquée*
Puissance fournie au fluide par la roue mobile



P_t

$P_t (H_t)$, Puissance (Hauteur) *manométrique*
Puissance fournie au fluide entre l'entrée et la sortie de la pompe

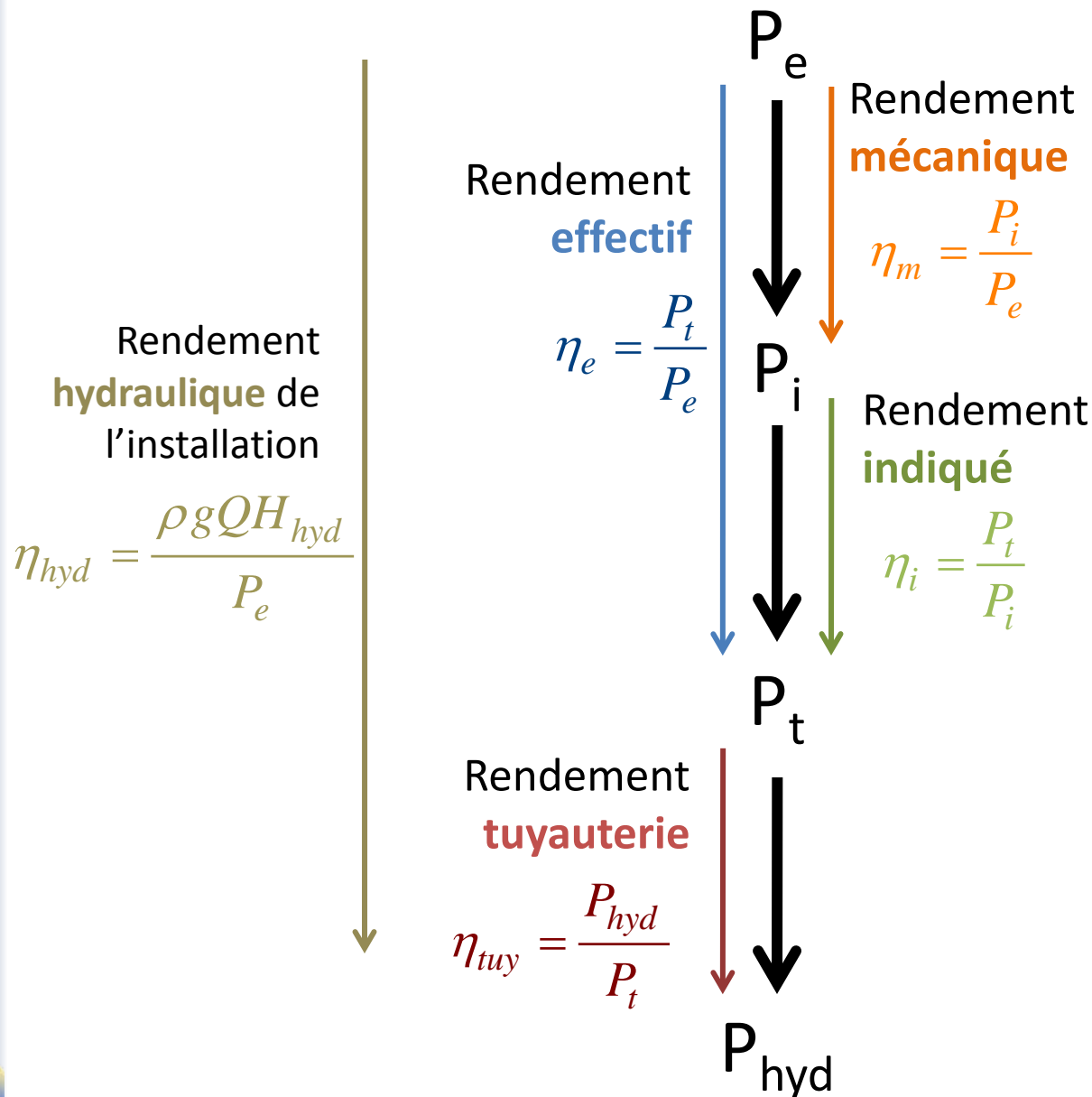


P_{hyd}

$P_{hyd} (H_{hyd})$, Puissance (Hauteur) *hydraulique*
Puissance reçue effectivement par le fluide



Origine de l'accroissement d'énergie... Bilan énergétique



$$\eta_{hyd} = \eta_{tuy} \eta_e$$

$$\eta_{hyd} = \eta_{tuy} \eta_i \eta_m$$

Sortie du distributeur(en 1) – Entrée dans la roue



Sortie de la roue (en 2)

⇒ Théorie nécessaire:

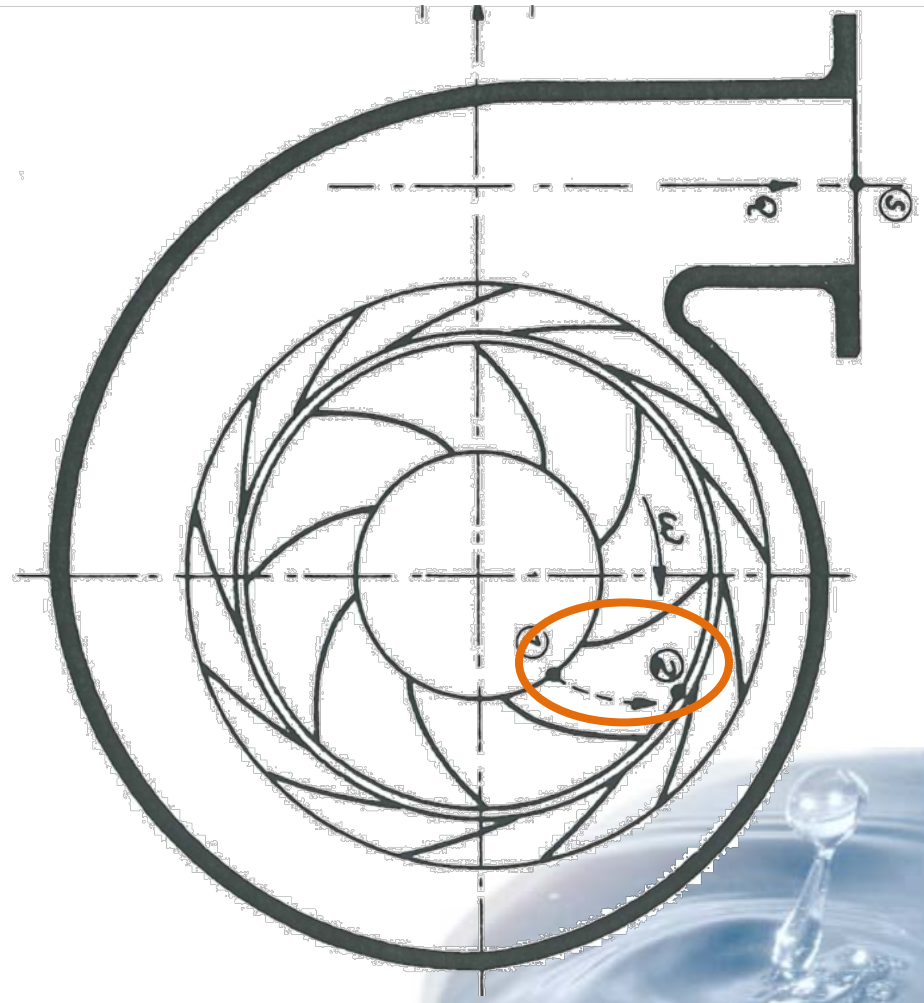
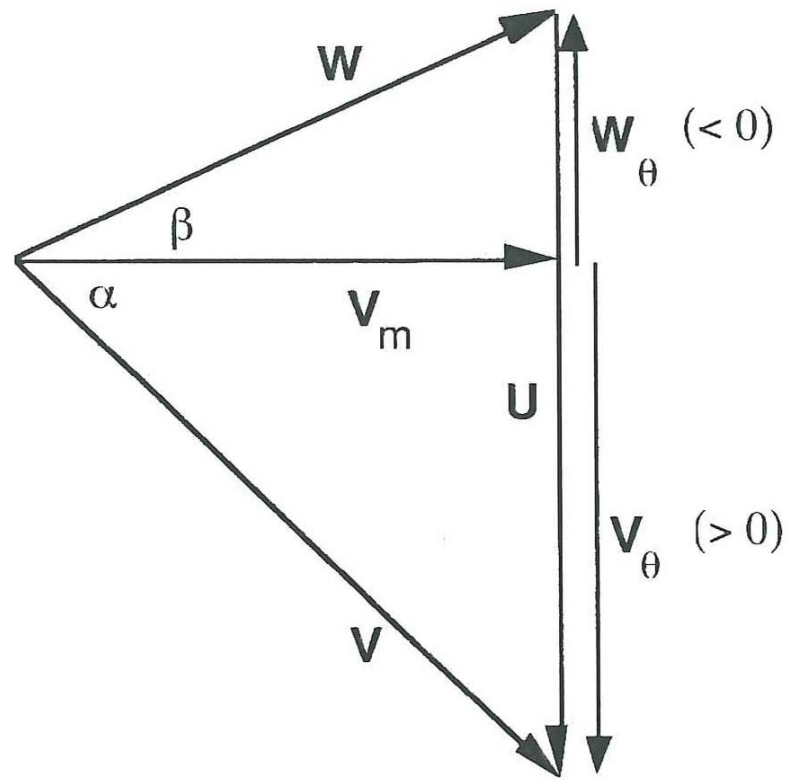
- Principe du « *triangle de vitesses* »
- Loi d'Euler



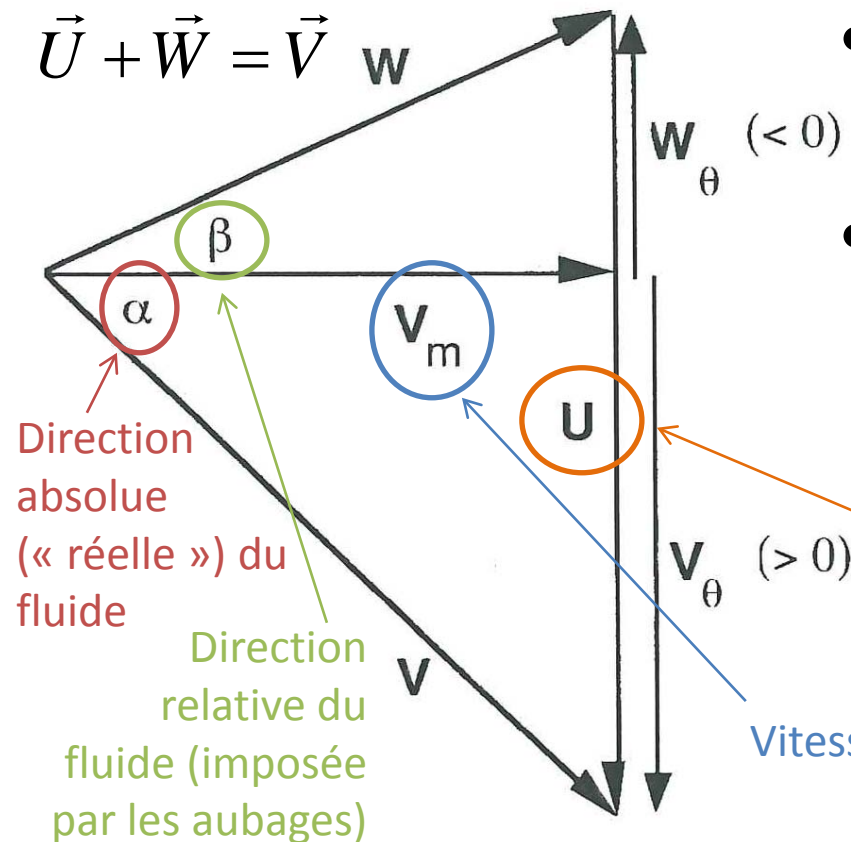
Sortie du distributeur(en 1) – Entrée dans la roue



Sortie de la roue (en 2)



On peut définir dans toute section de passage une vitesse moyenne du fluide



- V dans le mouvement absolu
- W dans le mouvement relatif

...avec U la vitesse d'entraînement

Fonction uniquement de la vitesse de rotation...

Vitesse « débitante »

$$Q_m = \rho V_m S = \rho V_m (\pi dbk)$$

d : diamètre

b : épaisseur du tube de courant

k : coefficient d'obstruction lié à la présence des aubes

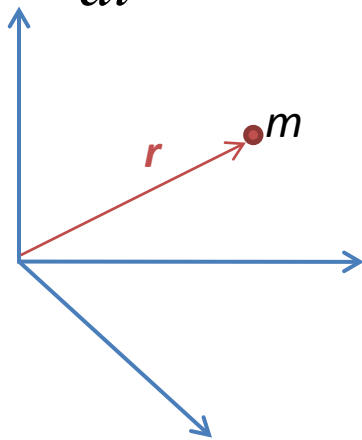
Second principe : conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}_{ext} \quad (\text{Loi de Newton})$$

Corolaire : conservation du moment angulaire :

Par multiplication vectorielle par le vecteur position (O point fixe)

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times (m\vec{V})) = \underbrace{\vec{r} \times \frac{d(m\vec{V})}{dt}}_{\vec{F}_{ext}} + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times (m\vec{V})}_0 = \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = \vec{C}_{ext}$$



$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{V}) = \vec{C}_{ext}} \quad (\text{Loi d'Euler})$$



Application à la veine fluide dans la roue...

Rappel : Théorème de transport de Reynolds

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_S (\phi V_i) n_i dS$$

Pour $\Phi = \vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{V} dm$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\partial \vec{L}_{\text{syst isole}}}{\partial t} + \text{Flux } \vec{L}_{\text{échanges bords}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{L}_{\text{syst isole}}}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho (\vec{r} \times \vec{V}) dV}_{=0 \text{ stationnaire}} = 0 \\ \text{Flux } \vec{L}_{\text{échanges bords}} = \oint_S \rho (\vec{r} \times \vec{V}) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \oint_S \rho (\vec{r} \times \vec{V}) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

Hypothèses

Machine en régime
Écoulement permanent



Application à l'arbre de la pompe...

$$\oint_S \rho (\vec{r} \times \vec{V}) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = Q_{r,out} (\vec{r} \times \vec{V})_{out} - Q_{r,in} (\vec{r} \times \vec{V})_{in} \quad (Q_r = Q_{roue})$$

$$= Q_r \left((rV_\theta)_{out} - (rV_\theta)_{in} \right)$$

Puissance à l'arbre de la pompe... $P_{ar} = \frac{d\vec{L}}{dt} \vec{\omega}$

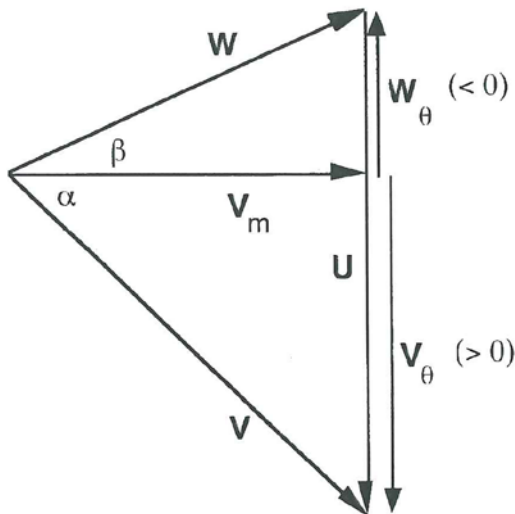
$$= Q_r \omega \left((rV_\theta)_{out} - (rV_\theta)_{in} \right)$$

$$= Q_r \left((UV_\theta)_{out} - (UV_\theta)_{in} \right)$$

$$\frac{P_{ar}}{Q_r} = \Delta(UV_\theta)$$

Travail échangé
par kilo de fluide

U la vitesse d'entraînement
 V_θ Composante tangentielle
de la vitesse absolue



Entrée dans la roue

Entrée impose direction
absolue...

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_1 \\ d_1, r_1, b_1, k_1 \end{array} \right.$$



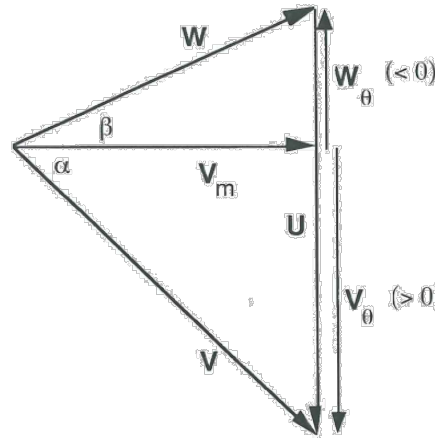
Sortie de la roue

Aubes imposent direction
relative...

$$\left| \begin{array}{l} \beta_2 \\ d_2, r_2, b_2, k_2 \end{array} \right.$$

Composantes du triangle...

$$\left| \begin{array}{l} U_1 = \omega r_1 \\ V_{m1} = \frac{Q_m}{\rho \pi d_1 b_1 k_1} \\ V_1, V_{\theta 1} = f(V_{m1}, \alpha_1) \\ W_{\theta 1} = V_{\theta 1} - U_1 \end{array} \right.$$



Composantes du triangle...

$$\left| \begin{array}{l} U_2 = \omega r_2 \\ V_{m2} = \frac{Q_m}{\rho \pi d_2 b_2 k_2} \\ W_2, W_{\theta 2} = f(V_{m2}, \beta_2) \\ V_{\theta 2} = W_{\theta 2} + U_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \text{Atan} \left(\frac{W_{\theta 1}}{V_{m1}} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \text{Atan} \left(\frac{V_{\theta 2}}{V_{m2}} \right)$$

Entrée dans la roue  Sortie de la roue



Puissance **indiquée**

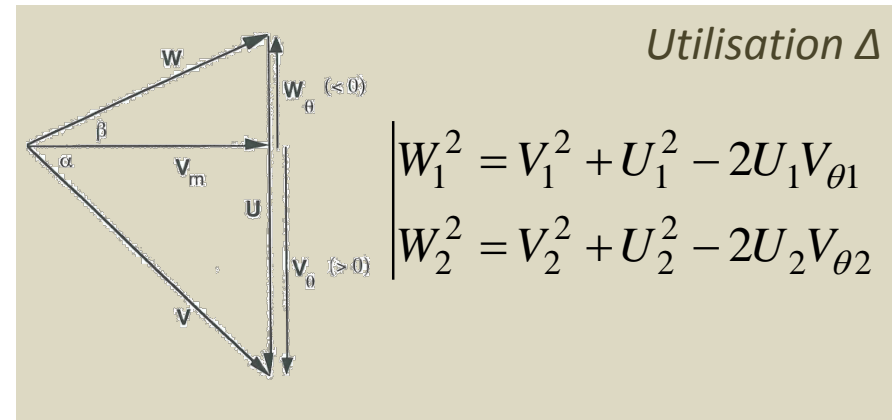
Puissance fournie au fluide par la roue mobile

$$P_i = \rho Q_r (U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1})$$

Hauteur **indiquée**

$$H_i = \frac{P_i}{\rho g Q_r} = \frac{1}{g} (U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1})$$

$$H_i = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g}$$



- Au final, dans la roue...

$$H_i = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + z_2 - z_1 + \sum \Delta h_{12} \quad (\text{Bernoulli})$$

$$\Rightarrow \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + z_2 - z_1 + \sum \Delta h_{12} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g}$$

Forces de Coriolis

Effet du
ralentissement du
fluide dans son
mouvement relatif





Etude analytique des pompes

Courbes de fonctionnement



Intérêt de l'utilisateur:

- Grandeurs hydrauliques (Q , H_t)
- Grandeurs mécaniques (P_e , ω)

... pour calculer

- Couple à l'arbre $C_e = P_e / \omega$
- Puissance énergétique totale $P_t = Q \rho g H_t$
- Rendement effectif $\eta_e = P_t / P_e$



Principes de conservations...

$$F(Q, H_t, \omega) = 0$$

$$G(Q, P_e, \omega) = 0$$

... représentent des surfaces ...

$$P_e = P_e(Q, \omega)$$

$$H_t = H_t(Q, \omega)$$

... qui, à vitesse de rotation constante, sont appelées « courbes caractéristiques » de la pompe

$$P_e = P_e(Q)$$

$$H_t = H_t(Q)$$



Obtention des courbes caractéristiques?

- Loi d'Euler => modélisation du fonctionnement de la pompe
- Mesures expérimentales des performances sur une pompe en fonctionnement

Illustration 1: Modélisation des courbes caractéristiques pour une pompe centrifuge

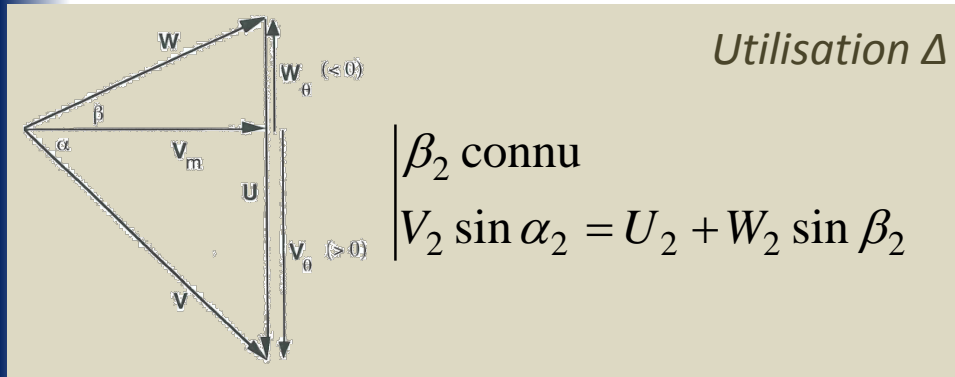
Illustration 2: Courbes caractéristiques expérimentales



- Hauteur indiquée

Loi d'Euler
$$H_i = \frac{P_i}{\rho g Q_r} = \frac{1}{g} (U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1})$$

$$= \frac{1}{g} (U_2 V_2 \sin \alpha_2 - U_1 V_1 \sin \alpha_1)$$



Conservation Q

$$W_2 = \frac{Q_r}{2\pi k_2 r_2 b_2 \cos \beta_2}$$

$$V_1 = \frac{Q}{2\pi k_1 r_1 b_1 \cos \alpha_1} \approx \frac{Q_r}{2\pi k_1 r_1 b_1 \cos \alpha_1}$$

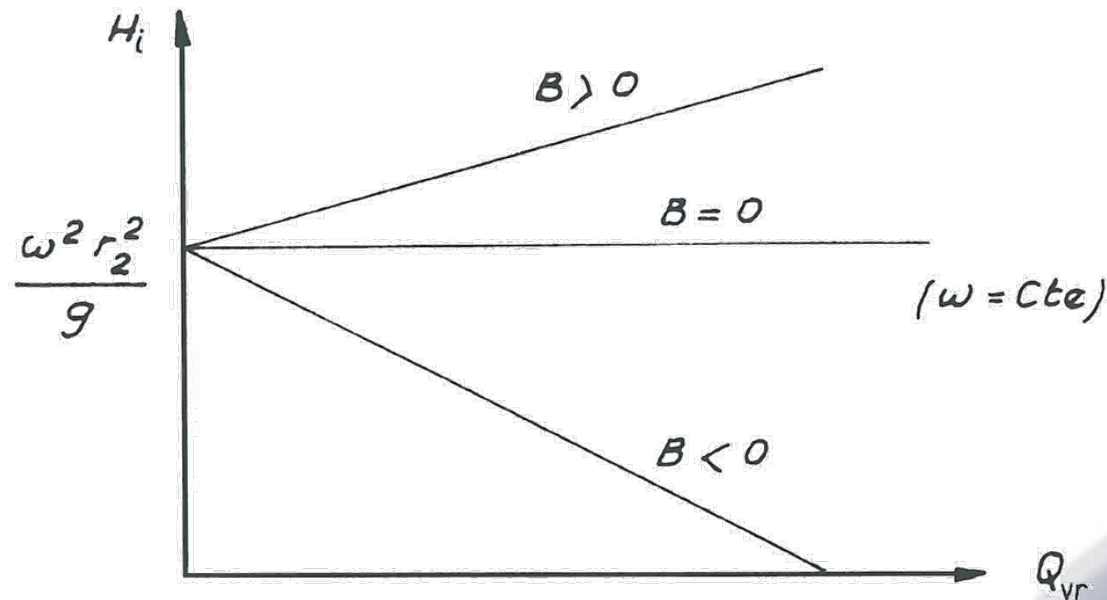
$$H_i = \frac{1}{g} (U_2^2 + U_2 W_2 \sin \beta_2 - U_1 V_1 \sin \alpha_1)$$

$$H_i = \frac{\omega^2 r_2^2}{g} + \frac{\omega}{g} Q_r \left(\frac{\tan \beta_2}{2\pi k_2 b_2} - \frac{\tan \alpha_1}{2\pi k_1 b_1} \right)$$

- Hauteur indiquée

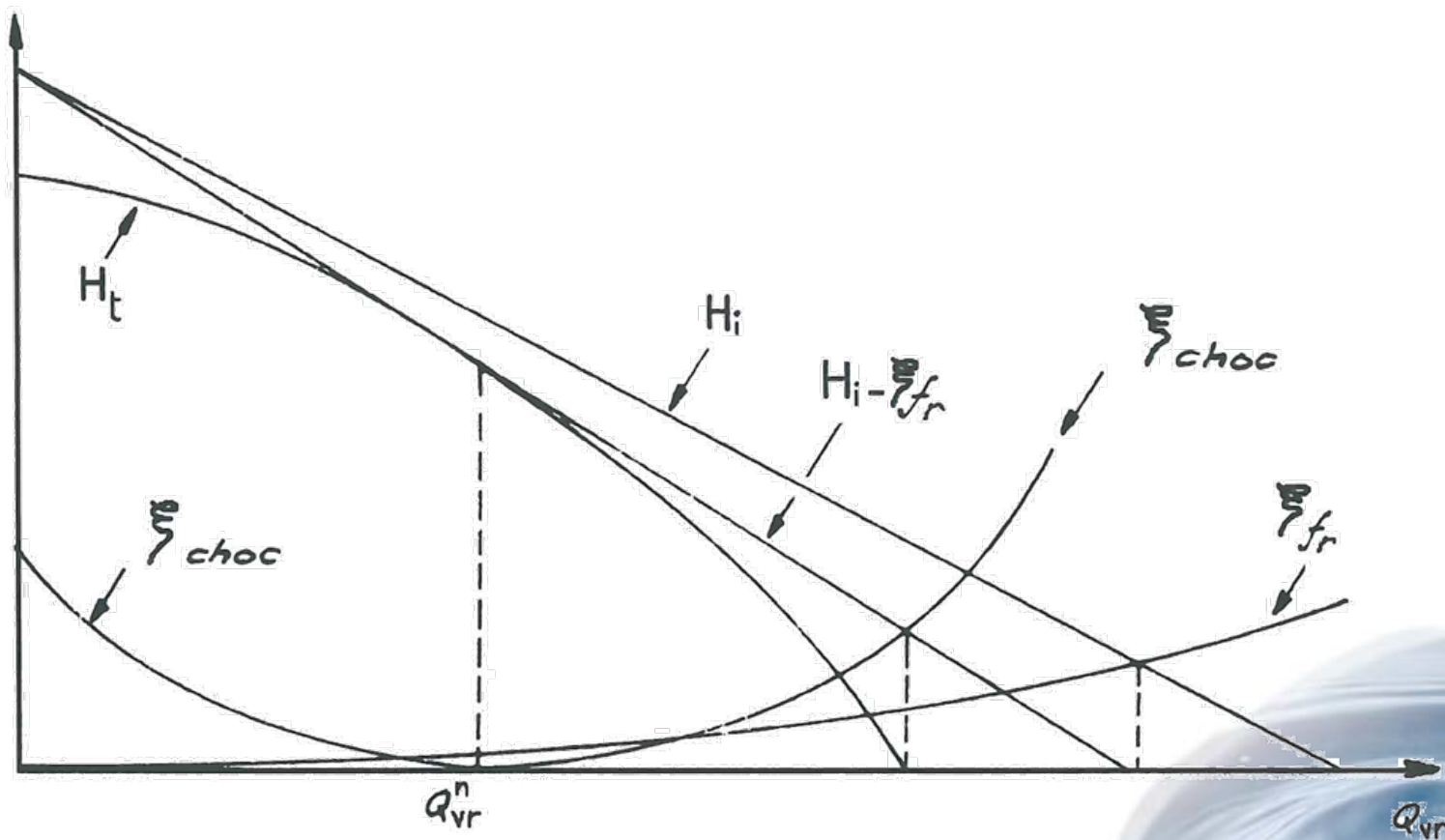
$$H_i = \frac{\omega^2 r_2^2}{g} + \frac{\omega}{g} Q_r \left(\frac{\tan \beta_2}{2\pi k_2 b_2} - \frac{\tan \alpha_1}{2\pi k_1 b_1} \right)$$

$$H_i = A + BQ_r$$



- Hauteur manométrique

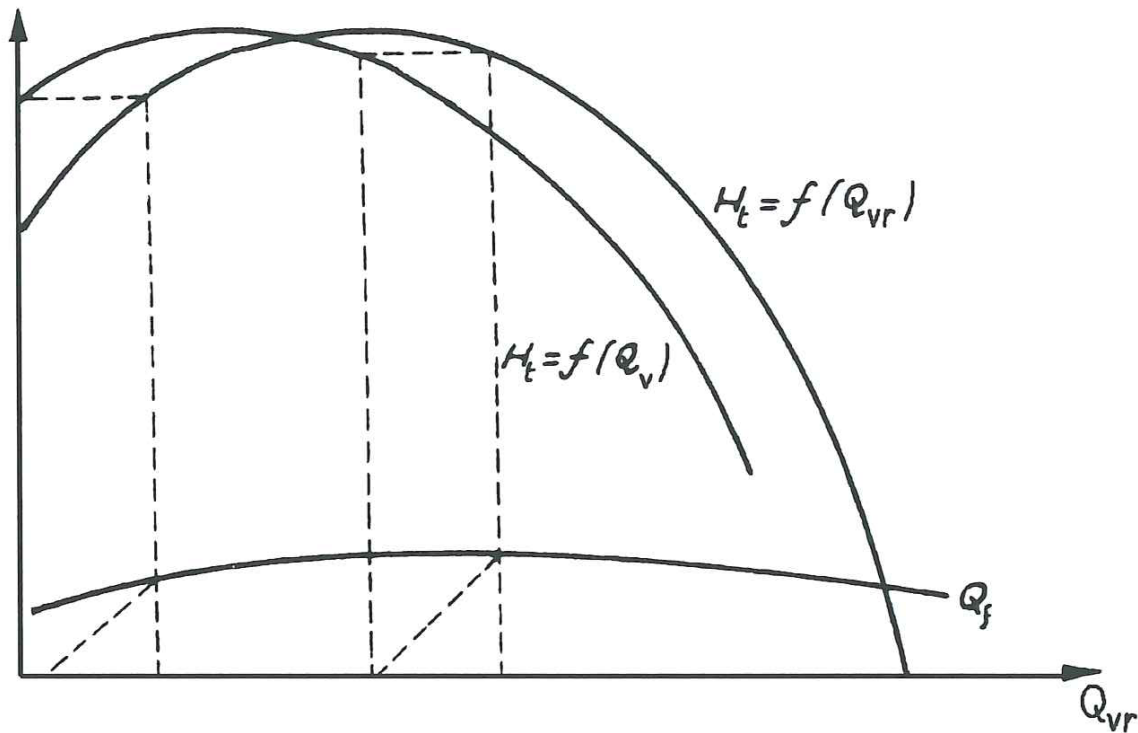
$$H_i = H_t + \sum \Delta h_{ES}$$



- Hauteur manométrique

Débit dans la roue... Débit « réel »

$$H'_t(Q) = H_t(Q_r)$$

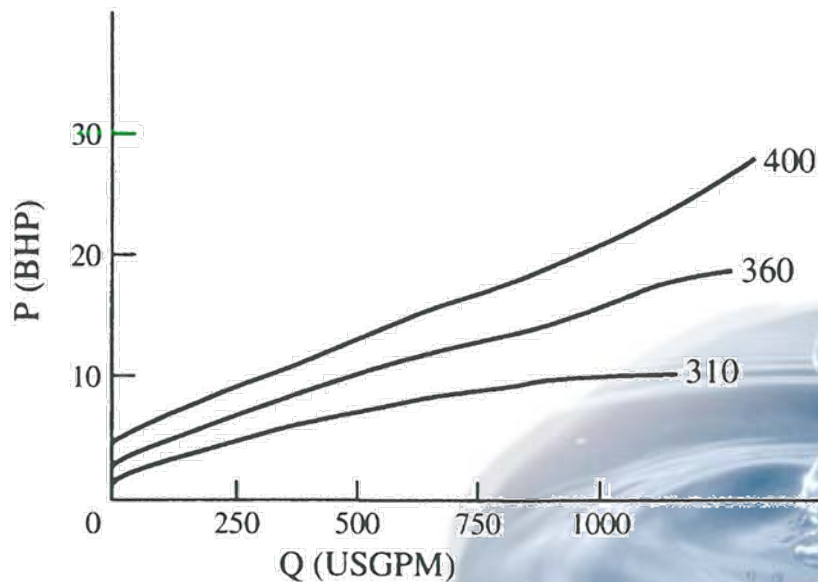
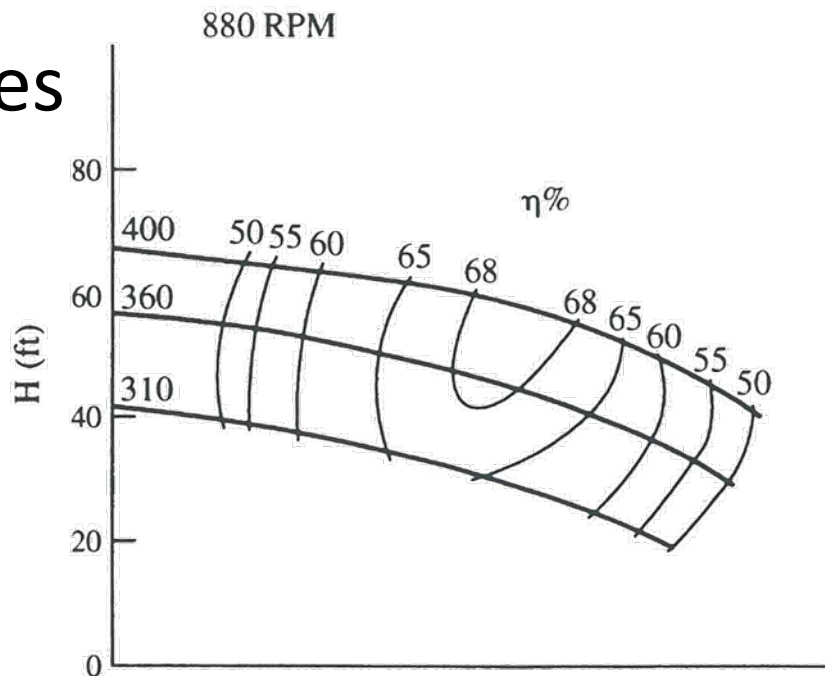
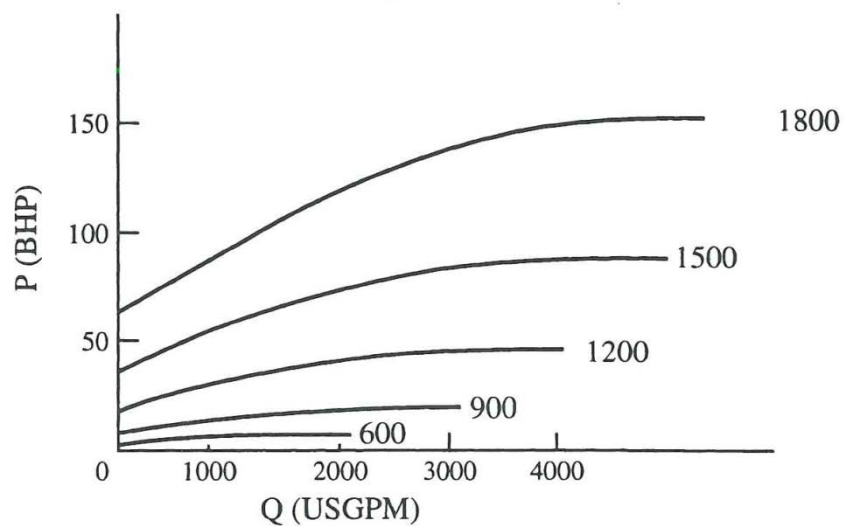
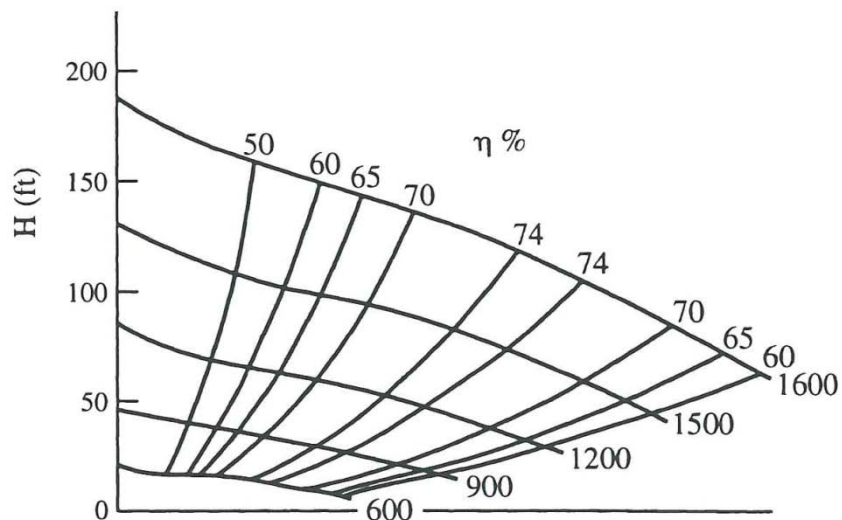


- Puissance indiquée

$$P_i = Q_r \rho g H_i = \rho \omega^2 r_2^2 Q_r + \rho \omega Q_r^2 \left(\frac{\tan \beta_2}{2\pi k_2 b_2} - \frac{\tan \alpha_1}{2\pi k_1 b_1} \right)$$



- Courbes expérimentales





Fonctionnement d'une pompe *sur une installation*



- Pompe >< Installation...
 - Hauteur manométrique d'une pompe par rapport à l'installation

$$H_t = H_{hyd} + \sum \Delta h_{tuy}$$

- Fonctionnement de la pompe

$$H_t = F(Q) \quad P_t = G(Q) \quad \eta_e = H(Q)$$

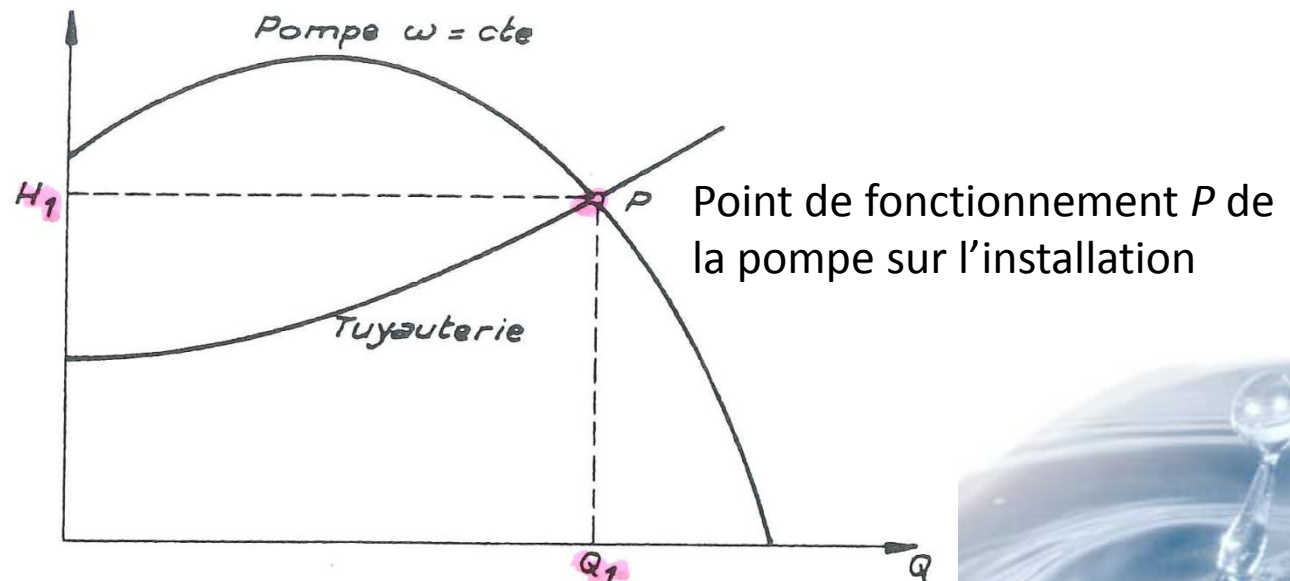


Point de fonctionnement d'une pompe sur une installation

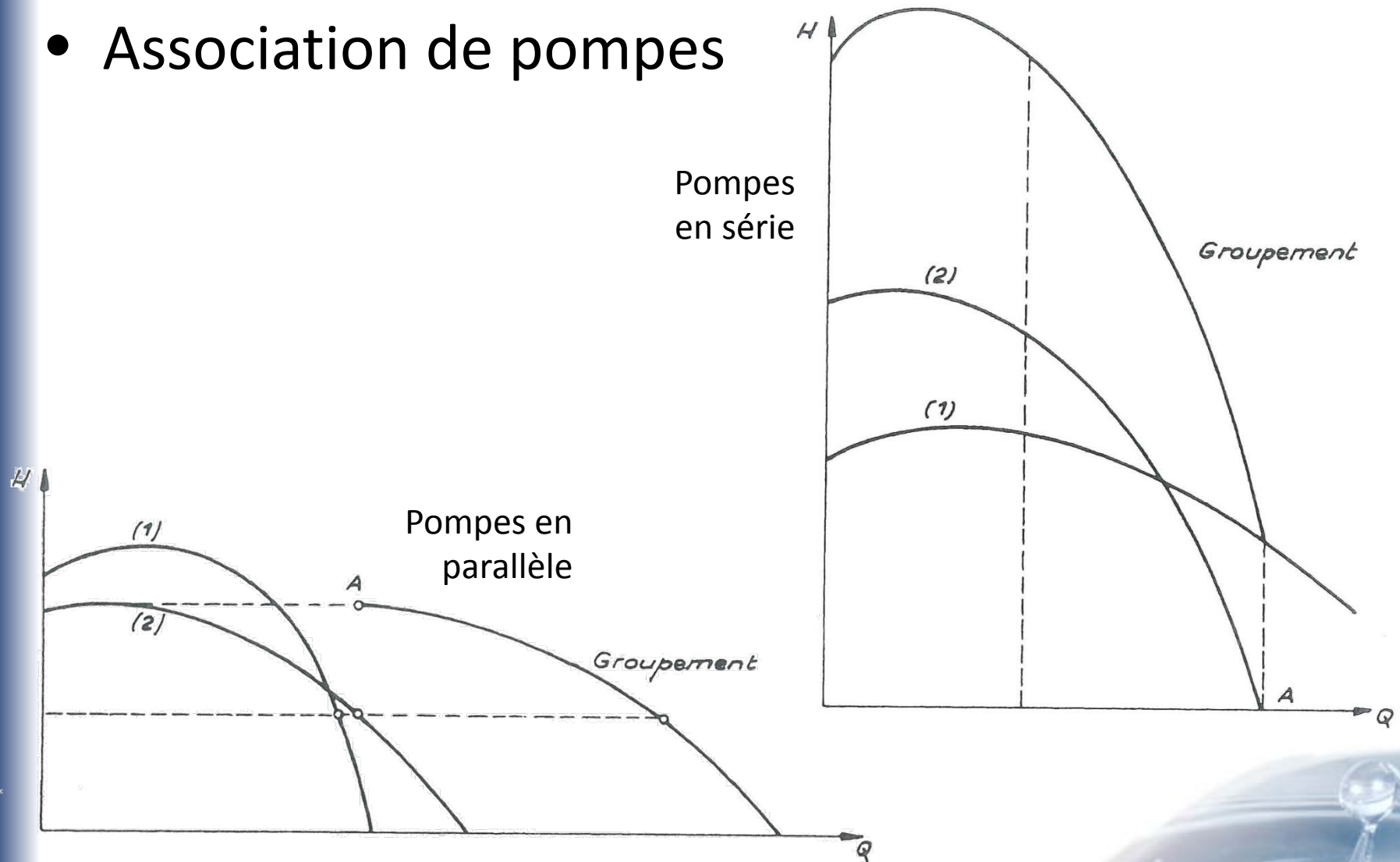
- Pompe >< Installation...

- Système...

$$\begin{cases} H_t = F(Q) \\ H_t = H_{hyd} + \sum \Delta h_{tuy} = \frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta z + \sum_i k_i Q^2 \end{cases}$$



- Association de pompes





La cavitation

dans le cas particulier des pompes

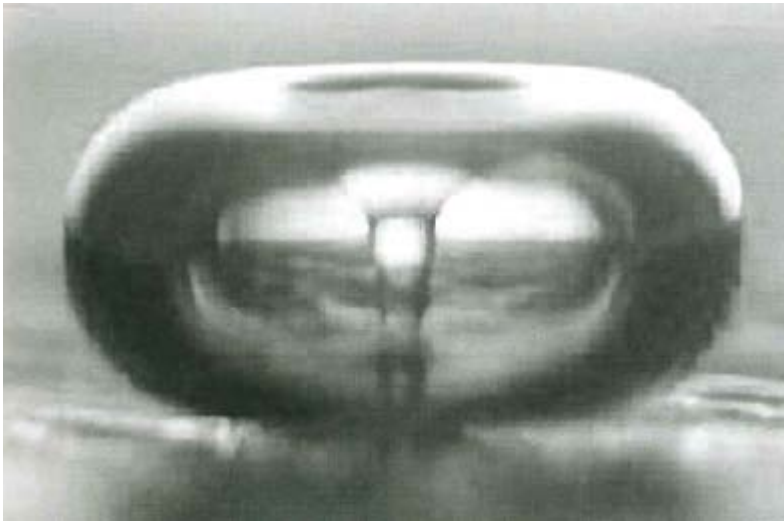


- Pression varie en fonction de la vitesse (Bernoulli)

$U \nearrow \Rightarrow p \searrow$ - Valeur limite: tension de vapeur p_v

\Rightarrow apparition phase gazeuse

\Rightarrow « bulles » de gaz emportées par l'écoulement

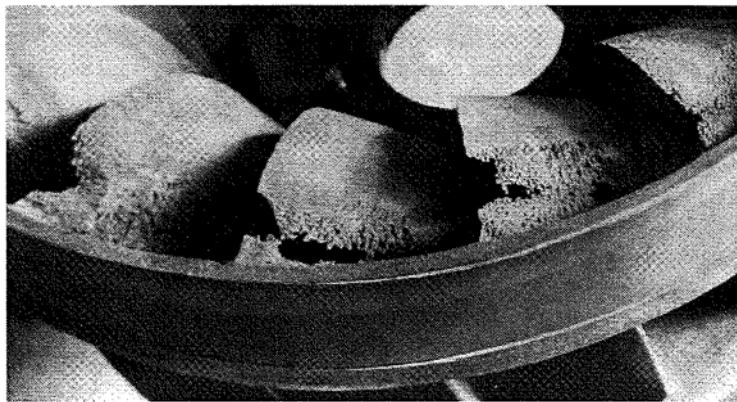


\Rightarrow implosion des bulles lorsque la pression redevient acceptable

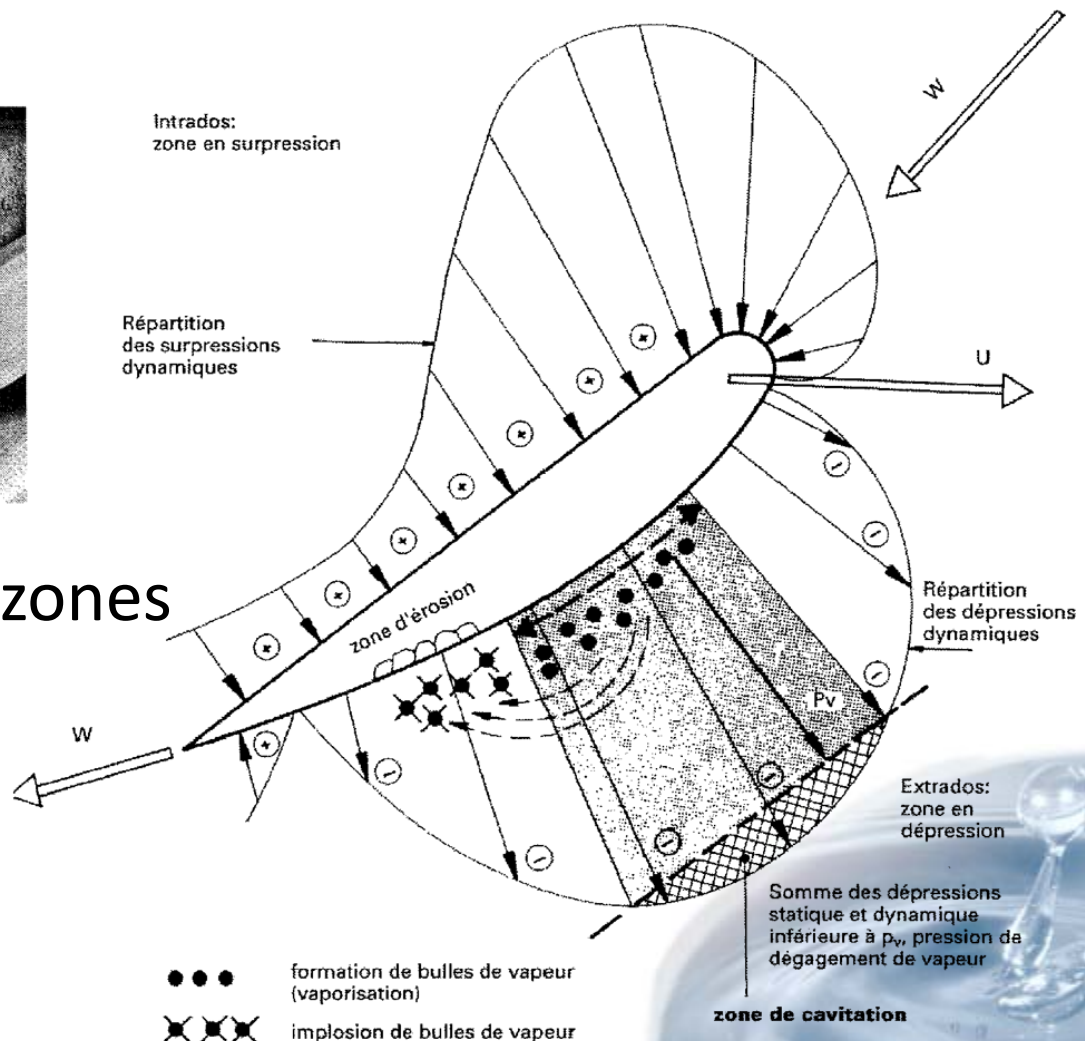


Description du phénomène... Cas particulier des pompes

- Concerne zone d'aspiration (p la plus faible)
- Vitesse \nearrow par l'entraînement du rotor



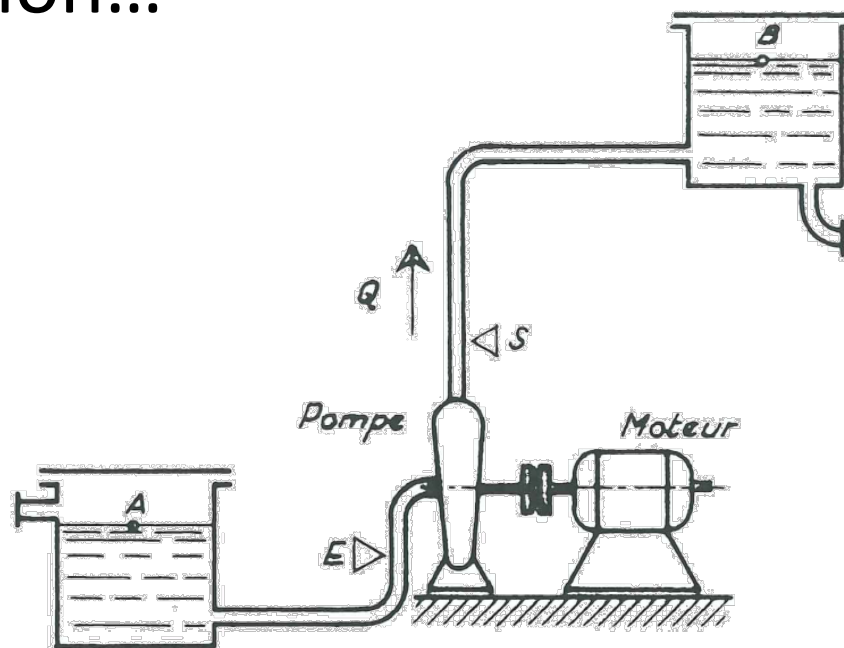
- Dégâts dans les zones d'implosion des bulles



Baisse de pression...

– Générale

- $H_{\text{aspiration}} \nearrow$
- $p_{\text{atm}} \searrow$
- $p_{\text{aspiration}} \searrow$



– Locale

- $V_{\text{fluide}} \nearrow$
- Décollement ou contraction des filets fluides
- Changement des directions des lignes de courant

- « Rêve »: mesure sur l'extrados

- $p_{\text{aspiration}}$...

Bernoulli entre E (entrée pompe) et 1 (entrée roue)

$$p_{\min} = p_E^0 - \rho g \sum \Delta h_{E1} - \rho \frac{U_1^2}{2}$$

$$p_{\min} \approx p_E^0$$

- Energie disponible

$$e_{\text{disp}} = \frac{p - p_v}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$



- NPSE (*Net Positive Suction Energy*)

$$NPSE = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right)_{e_{disp} \searrow 0}$$

- NPSH (*Net Positive Suction Head*)

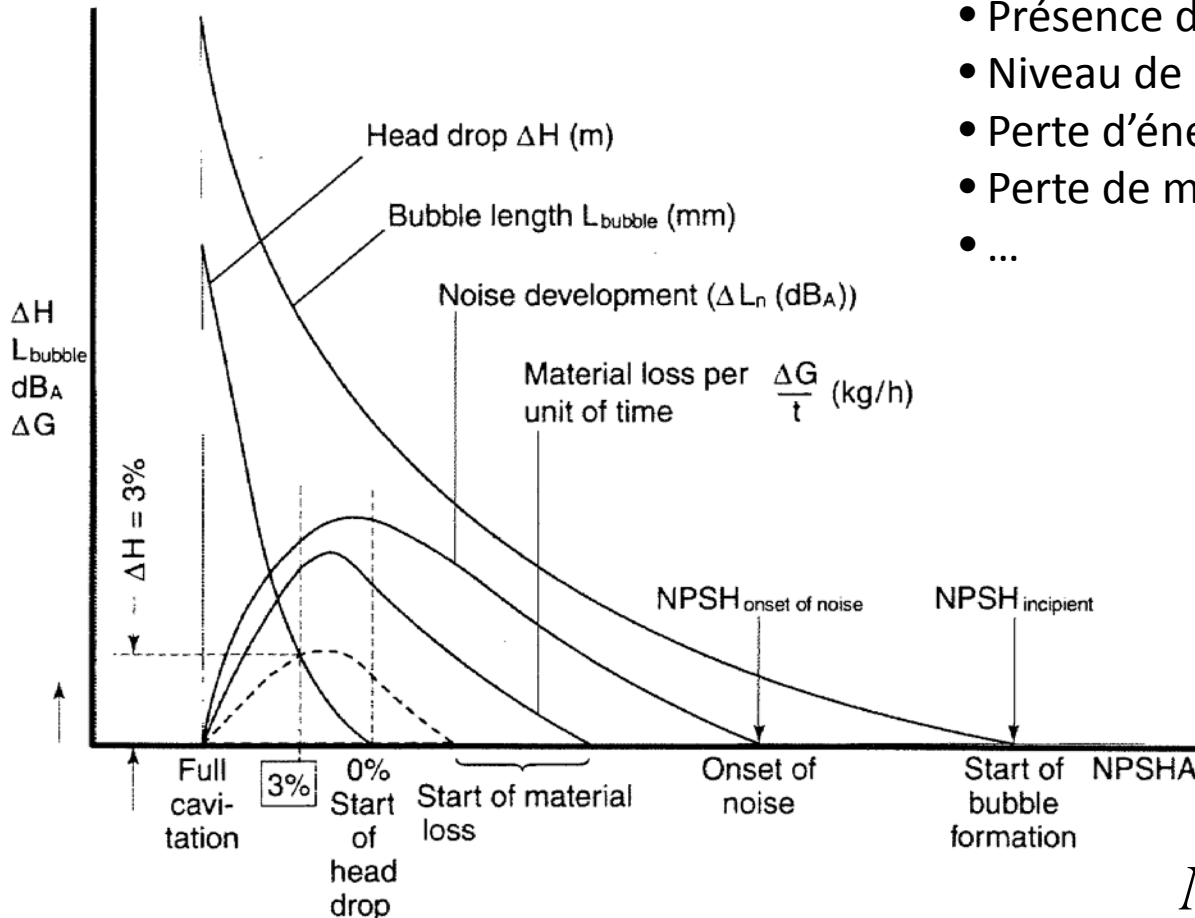
$$NPSH = \frac{NPSE}{g} = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} \right)_{e_{disp} \searrow 0}$$

- [m]
- $f(\text{machine, vitesse de rotation, débit})$
- Courbes du NPSH caractéristique



- Critère de début de cavitation

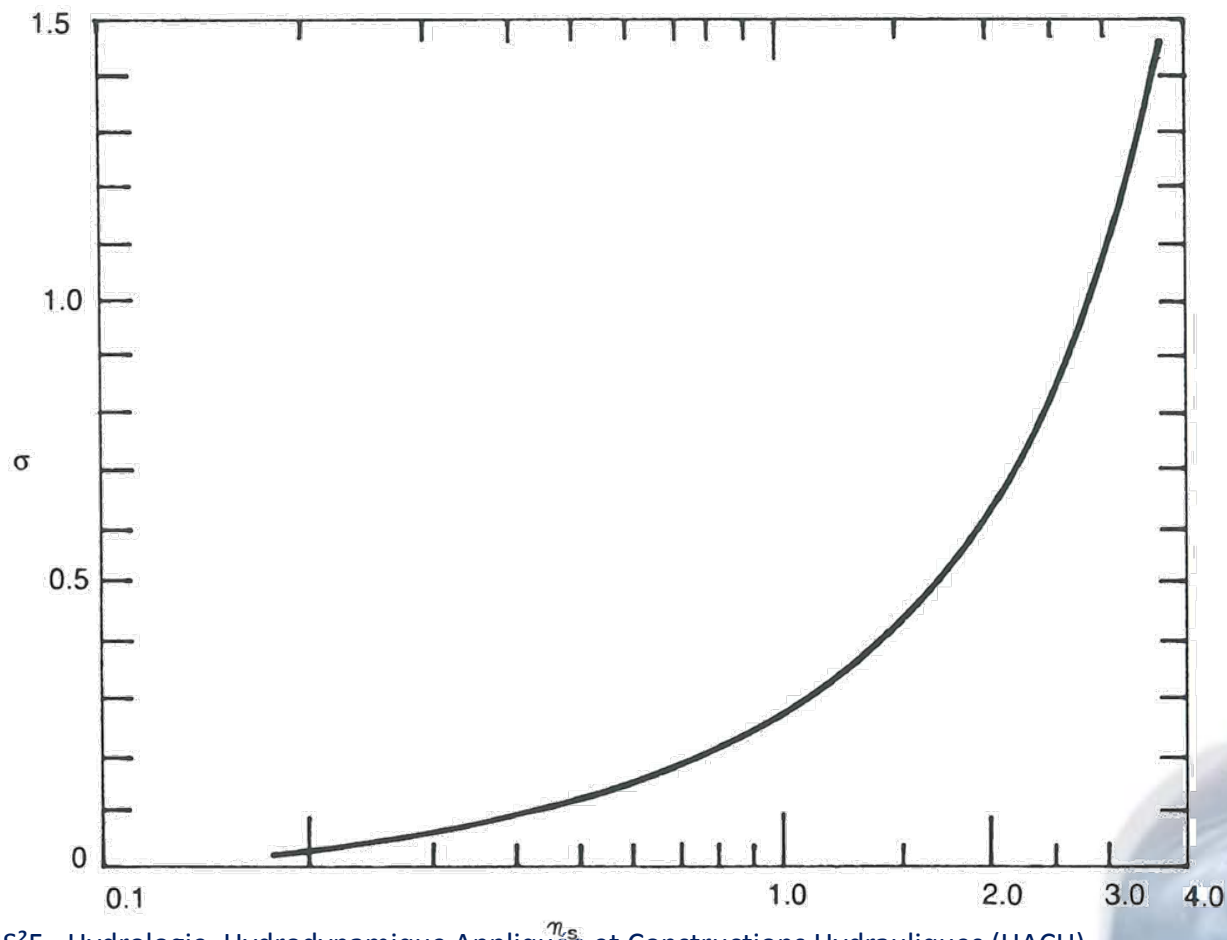
- Présence de bulles d'une certaine taille;
- Niveau de bruit;
- Perte d'énergie d'un certain pourcentage;
- Perte de matière;
- ...



$$NPSHA = \frac{p - p_v}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}$$

- Coefficient critique de Thoma

$$\sigma = \frac{NPSH}{H_t}$$



$$\sigma = k_{cr} n_s^{4/3}$$

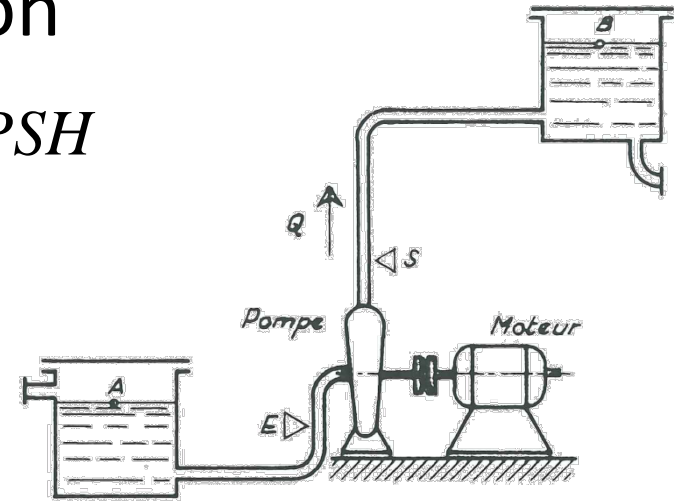
- Condition de non-cavitation

$$NPSHA \geq NPSH$$

Rappel, Bernoulli

$$p_{\min} \approx p_E$$

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_E}{\rho g} + \frac{U_E^2}{2g} + z_E + \sum \Delta h_{AE}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow NPSHA &= \frac{p_E - p_v}{\rho g} + \frac{U_E^2}{2g} \\ &= \frac{p_A - p_v}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} + (z_A - z_E) - \sum \Delta h_{AE} \\ &\geq NPSH \end{aligned}$$

- p_a
- hauteur géométrique
- pertes de charge
- température eau ($\rightarrow p_v$)